OPERATIONAL RESEARCH II

Agustina Eunike, ST., MT., MBA.
Industrial Engineering – University of Brawijaya

GAME THEORY

- Teori permainan merupakan bagian dari studi *rational behavior* terhadap kesalingtergantungan atau interdependensi antar pemain.
- Para pemain memiliki persamaan kepentingan untuk mendapatkan bagian keuntungan sebesar mungkin.
- Para pemain memiliki kepentingan yang saling bersinggungan untuk memaksimalkan bagian keuntungan masing-masing.

GAME THEORY

- Pengambilan keputusan rasional seorang pemain membutuhkan antisipasi terhadap respon pesaing.
- Ekspektasi terhadap perilaku pesaing tidaklah selalu sesuai harapan.
- ketidakpastian menjadi pertimbangan penting dari permainan ini.

GAME THEORY

- Setiap pemain bermain rasional, dengan asumsi memiliki intelegensi yang sama, dan tujuan sama, yaitu memaksimumkan payoff, dengan kriteria maksimin dan minimaks.
- Terdiri dari 2 pemain, keuntungan bagi salah satu pemain merupakan kerugian bagi pemain lain.
- Tujuan dari teori permainan ini adalah mengidentifikasi strategi yang optimal

GAME THEORY

Syarat dan Ketentuan:

- Tabel yang disusun menunjukkan keuntungan pemain baris, dan kerugian pemain kolom.
- Permainan dikatakan adil jika hasil akhir menghasilkan nilai nol (0), tidak ada yang menang/kalah.

Prisoner's Dilema

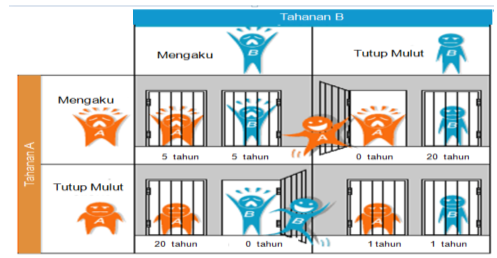
- Dua orang ditangkap oleh polisi dan didakwa menjadi pelaku tindakan yang melawan hukum.
- Dua orang tersebut ditahan dalam ruang yang terpisah sehingga keduanya tidak bisa untuk berkomunikasi.

Prisoner’s Dilema

- Dua orang tersebut akan diinterogasi dan sebelum diinterogasi kedua tersangka tersebut diberi tahu bahwa:
  - Jika salah satu mengaku dan yang lain tidak mengaku, maka yang mengaku akan bebas dan yang tidak mengaku akan mendapat hukuman 20 tahun penjara.
  - Jika dua-duanya tidak mengaku maka keduanya akan dipenjara selama 1 tahun.
  - Jika dua tersangka tersebut mengaku maka keduanya akan dipenjara selama 5 tahun.
- Apakah yang seharusnya dilakukan oleh kedua tersangka tersebut??

Prisoner’s Dilema

Pilihan tindakan (strategi) yang bisa dipilih oleh kedua tersangka tersebut beserta konsekuensinya dapat digambarkan sebagai berikut:



Tindakan yang akan diambil Tersangka 1

- Tersangka 1
  - Jika ia mengaku maka kemungkinan ia akan dihukum 5 tahun jika ternyata tersangka 2 juga mengaku atau akan bebas jika tersangka 2 tidak mengaku.
  - Jika ia tidak mengaku maka kemungkinan ia akan dihukum 20 tahun jika ternyata tersangka 2 mengaku atau akan dihukum 1 tahun kalau tersangka 2 juga tidak mengaku.

→ **Apapun tindakan yang akan diambil oleh tersangka 2, bagi tersangka 1 akan selalu lebih menguntungkan untuk mengaku!**

Tindakan yang akan diambil Tersangka 2

- Tersangka 2
  - Jika ia mengaku maka kemungkinan ia akan dihukum 5 tahun jika ternyata tersangka 1 juga mengaku atau akan bebas jika tersangka 1 tidak mengaku.
  - Jika ia tidak mengaku maka kemungkinan ia akan dihukum 20 tahun jika ternyata tersangka 1 mengaku atau akan dihukum 1 tahun kalau tersangka 1 juga tidak mengaku.

→ **Apapun tindakan yang akan diambil oleh tersangka 1, bagi tersangka 2 akan selalu lebih menguntungkan untuk mengaku!**

Strategi yang akan diambil oleh tersangka 1 dan tersangka 2

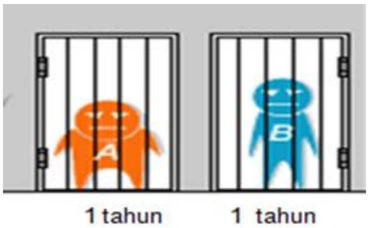
- Berdasarkan analisa tersebut maka bisa dipastikan keduanya akan mengaku!!
- Kedua orang tersebut akan dihukum selama 5 tahun!

Apakah yang akan terjadi kalau mereka diperbolehkan berkomunikasi??

Apakah yang akan terjadi kalau mereka diperbolehkan berkomunikasi??

- Keduanya akan bekerjasama dan masing-masing akan tutup mulut sehingga mereka masing-masing l

Apakah yang akan terjadi kalau mereka diperbolehkan berkomunikasi??



Intisari Prisoner's Dilemma

- Kedua pemain akan memiliki kondisi lebih baik apabila mereka dapat bekerja sama atau kooperatif dalam memecahkan masalah
  - → Oleh karena itu, polisi akan memisahkan tersangka ke dalam ruang interogasi berbeda
- Titik keseimbangan atau *equilibrium* tidak harus efisien. Titik keseimbangan non-kooperatif di dalam Prisoner's Dilemma menghasilkan pemecahan masalah yang bukan merupakan hasil terbaik yang dikehendaki kedua pihak

Nash Equilibrium

- Tidak ada satu pemainpun yang memiliki insentif untuk mengubah strategi, terhadap pilihan pemain lainnya.
- Apabila keduanya mengaku, maka titik keseimbangan tercapai yang disebut sebagai Nash Equilibrium
- Apabila keduanya tidak mengaku, maka tidak dapat dikategorikan sebagai Nash Equilibrium, karena pesaing akan selalu ingin melawan atau memberontak
- *Nash equilibrium is a solution concept of a non-cooperative game involving two or more players, in which each player is assumed to know the equilibrium strategies of the other players, and no player has anything to gain by changing only their own strategy*

Two-Person, Zero Sum Games

- Melibatkan hanya dua orang player
- Jumlah perolehan player pemenang sama dengan jumlah kerugian player yang kalah → net winning kedua player sama dengan nol
- Karakteristik two-person game
  - – Ada pilihan strategi untuk player I
  - – Ada pilihan strategi untuk player II
  - – Ada tabel payoff

Two-Person, Zero Sum Games

- Strategi
  - – Aturan yang ditetapkan diawal terkait tindakan yang harus diberikan pada situasi tertentu, untuk tiap tahap permainan.
- Tabel Payoff
  - – Menunjukkan perolehan pemain I yang dihasilkan dari tiap kombinasi strategi tiap pemain.

Two-Person, Zero Sum Games

Asumsi:

- Kedua pemain adalah rasional
- Kedua pemain memilih strategi yang mendorong kesejahteraannya sendiri.

Tabel *Payoff*

Pemain 2

Pemain 1		1	2	…	n
	1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
	2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
	…	…	…	…	…
	m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Jika pemain 1 menggunakan strategi i dan pemain 2 mengunakan strategi j, maka perolehan untuk pemain 1 adalah a_{ij} (perolehan untuk pemain 2 adalah $-a_{ij}$)

Game “Odds and Evens”

- Setiap player saling menunjukkan satu atau dua jari secara bersamaan. Bila banyaknya jari yang keluar sama sehingga jumlahnya genap maka player I memenangkan taruhan sebesar $1 dari player II, dan sebaliknya
- Strategi tiap player → menunjukkan satu atau dua jari

Game “Odds and Evens”

Payoff Table for the Odds and Evens Game			
Strategy		Player II	
		1	2
Player I	1	1	-1
	2	-1	1

“Political Campaign Problem”

- Dua orang politisi saling bersaing untuk dapat duduk di kursi DPR. Kampanye harus dilakukan pada dua hari terakhir. Kedua politisi tersebut berkeinginan menghabiskan masa kampanye di dua kota, Surabaya dan Malang. Agar waktu yang dimiliki dapat digunakan dengan efektif dan efisien, mereka merencanakan untuk untuk melakukan perjalanan di malam hari dan menghabiskan waktu 1 hari penuh pada tiap kota atau dua hari penuh pada satu kota.

  Untuk pengaturan yang optimal, tiap politisi melakukan pengukuran terhadap dampak yang dapat diperoleh (mungkin menang atau kalah) dari berbagai variasi waktu tinggal, baik untuk dirinya maupun lawan politiknya. Strategi mana yang terbaik untuk digunakan oleh politisi tersebut?

“Political Campaign Problem”

Strategi

- Strategi 1: menghabiskan satu hari di masing-masing kota
- Strategi 2: menghabiskan dua hari di Surabaya
- Strategi 3: menghabiskan dua hari di Malang

Formulasi Tabel Payoff untuk “Political Campaign Problem”

Total Perolehan Suara yang Dimenangkan Politisi I (x 1.000 suara)				
Strategi		Politisi II		
		1	2	3
Politisi I	1			
	2			
	3			

Variasi I :Dominated Strategy

Total Perolehan Suara yang Dimenangkan Politisi I (x 1.000 suara)				
Strategi		Politisi II		
		1	2	3
Politisi I	1	1	2	4
	2	1	0	5
	3	0	1	-1

Variasi I

Total Perolehan Suara yang Dimenangkan Politisi I (x 1.000 suara)				
Strategi		Politisi II		
		1	2	3
Politisi I	1	1	2	4
	2	1	0	5
	3	~~0~~	~~1~~	~~-1~~

Variasi I

Total Perolehan Suara yang Dimenangkan Politisi I (x 1.000 suara)				
Strategi		Politisi II		
		1	2	3
Politisi I	1	1	2	4
	2	1	0	5
	3	~~0~~	~~1~~	~~-1~~

Variasi I

Total Perolehan Suara yang Dimenangkan Politisi I (x 1.000 suara)				
Strategi		Politisi II		
		1	2	3
Politisi I	1	1	2	4
	2	~~1~~	~~0~~	~~5~~
	3	~~0~~	~~1~~	~~-1~~

Variasi I

Total Perolehan Suara yang Dimenangkan Politisi I (x 1.000 suara)				
Strategi		Politisi II		
		1	2	3
Politisi I	1	1	2	4
	2	~~1~~	~~0~~	~~5~~
	3	~~0~~	~~1~~	~~-1~~

Variasi I

- Kedua politisi mengambil strategi 1
- Politisi I akan mendapatkan payoff sebesar 1 dari politisi II (politisi I merebut 1.000 suara dari politisi II)
- Payoff 1 → nilai game

- Fair game → nilai game = 0
- Unfair game → nilai game ≠ 0

Strategi Maximin-Minimax

Pemain 1 → strategi maximin

- Setiap strategi dicari kemungkinan terburuknya,
- Pilih strategi yang kemungkinan terburuknya memiliki payoff yang terbesar jika dibandingkan dengan strategi yang lain.

Pemain 2 → strategi minimax

- Dasar pemikiran sama dengan maximin pada pemain 1.
- Pada tabel payoff nilai yang besar (positif) justru menunjukkan kerugian yang besar pada pemain 2 sehingga maximin menjadi minimax!

Variasi II

Total Perolehan Suara yang Dimenangkan Politisi I (x 1.000 suara)				
Strategi		Politisi II		
		1	2	3
Politisi I	1	-3	-2	6
	2	2	0	2
	3	5	-2	-4

Variasi II : Minimax Criterion

Total Perolehan Suara yang Dimenangkan Politisi I (x 1.000 suara)						
Strategi		Politisi II			Minimum	
		1	2	3		
Politisi I	1	-3	-2	6	-3	
	2	2	0	2	0	→ maximin
	3	5	-2	-4	-4	
Maksimum		5	0	6		

↓
Minimax

Variasi II

- Nilai game = 0 → fair game
- Player (politisi) I memilih strategi dengan minimum payoff terbesar (maximin)
- Player (politisi) II memilih strategi dengan maximum payoff terkecil (minimax)
- Maximin = minimax → saddle point → stable solution

Variasi III

Total Perolehan Suara yang Dimenangkan Politisi I (x 1.000 suara)				
Strategi		Politisi II		
		1	2	3
Politisi I	1	0	-2	2
	2	5	4	-3
	3	2	3	-4

Variasi III

Total Perolehan Suara yang Dimenangkan Politisi I (x 1.000 suara)						
Strategi		Politisi II			Minimum	
		1	2	3		
Politisi I	1	0	-2	2	-2	→ maximin
	2	5	4	-3	-3	
	3	2	3	-4	-4	
Maksimum		5	4	2		

↓
Minimax

Variasi III

- Maximin ≠ Minimax
- Tidak ada saddle point
- Unstable solution
- Tidak dapat diselesaikan dengan “pure strategy”
- Diselesaikan dengan “mixed strategies”

Latihan :

- Tentukan strategi optimal untuk tiap pemain dengan menggunakan *dominated strategy* beserta nilai payoff-nya.
- Berikan daftar strategi dominasi dari tiap pemain yang digunakan untuk mengeliminasi strateginya

		II			
		1	2	3	4
I	1	2	-3	-1	1
	2	-1	1	-2	2
	3	-1	2	-1	3

Latihan :

- Tentukan *saddle point* -nya

		II			
		1	2	3	4
I	1	3	-3	-2	-4
	2	-4	-2	-2	1
	3	1	-1	2	0

GAME THEORY

MIXED STRATEGY

Mixed Strategies

- x_i = probabilitas player I menggunakan strategi i; i = 1, 2, …, m
- y_j = probabilitas player II menggunakan strategi j, j = 1, 2, …, n
- p_{ij} = payoff jika player I menggunakan strategi murni i dan player II menggunakan strategi murni j
- v* = payoff optimal

Mixed Strategies

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

$$v^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_i y_j$$

Mixed Strategies

			Player 2				EPO**
	Strategi	j	1	2	……	n	
	i	Proba bilitas	y_1	y_2	……	y_n	
Player 1	1	x_1	p_{11}	p_{12}	……	p_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} p_{1j} x_1 y_j$
	2	x_2	p_{21}	p_{22}	……	p_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} p_{2j} x_2 y_j$
	:	:	:	:	……	:	:
	m	x_m	p_{m1}	p_{m2}	……	p_{mn}	$\sum_{j=1}^{n} p_{mj} x_m y_j$
EPO			$\sum_{i=1}^{m} p_{i1} x_i y_1$	$\sum_{i=1}^{m} p_{i2} x_i y_2$	……	$\sum_{i=1}^{m} p_{in} x_i y_n$	

**EPO: Expected Payoff

Mixed strategies

- Minimax theorem
  - If mixed strategies are allowed, the pair of mixed strategies that is optimal according to the minimax criterion provides a stable solution with $\underline{v} = \overline{v} = v$ (the value of the game), so that neither player can do better by unilaterally changing his strategy

Mixed Strategies

Solusi Optimal

- Player I memilih strategi x_i yang memaksimumkan EPO terkecil dalam kolom (maximin EPO)
- Player II memilih strategi y_j yang meminimumkan EPO terbesar dalam baris (minimax EPO)

Mixed Strategies

$$\underline{v} = \max_{x_i}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i, \ldots\ldots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i\right)\right\}$$

$$\overline{v} = \min_{y_j}\left\{\max\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}y_j, \ldots\ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j\right)\right\}$$

dimana

$\overline{v} \geq \underline{v}$

optimal dicapai bila

$\underline{v} = \overline{v} = v^*$

Mixed Strategies

- Contoh untuk variasi III
- Player I → (x_1, x_2, x_3) = (½, ½, 0)
- Player II → (y_1, y_2, y_3) = (0, ½, ½)

Mixed Strategies

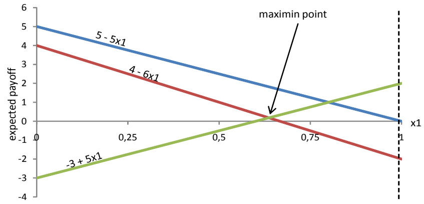
Reduced Payoff Table for Variation III

Probability			Player II		
			y_1	y_2	y_3
Probability		Pure strategy	1	2	3
Player I	x_1	1	0	-2	2
	$1 - x_1$	2	5	4	-3

Mixed Strategies

(y_1, y_2, y_3)	Expected Payoff
(1, 0, 0)	$0x_1 + 5(1 - x_1) = 5 - 5x_1$
(0, 1, 0)	$-2x_1 + 4(1 - x_1) = 4 - 6x_1$
(0, 0, 1)	$2x_1 - 3(1 - x_1) = -3 + 5x_1$

Mixed Strategies



Mixed Strategies

- Minimum EPO untuk player 1 → ditandai dengan garis batas yang terendah dari garis dalam grafik
- Maximin EPO untuk player 1 → titik potong tertinggi yang terletak pada garis batas minimum EPO
  - Titik potong garis $(4 - 6x_1)$ dan $(-3 + 5x_1)$

Mixed Strategies

$$
\begin{aligned}
4 - 6x_1 &= -3 + 5x_1 \\
11x_1 &= 7 \\
x_1 &= 7/11 \\
x_2 &= 1 - x_1 \\
&= 1 - 7/11 \\
&= 4/11
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{v} &= 4 - 6x_1 \\
&= 4 - 6(7/11) \\
&= 2/11 \\
\underline{v} &= -3 + 5x_1 \\
&= -3 + 5(7/11) \\
&= 2/11
\end{aligned}
$$

Mixed Strategies

- Titik maximin untuk player 1 dihasilkan dari perpotongan antar grafik EPO player 1 jika player 2 memilih pure strategy 2 dan 3
- $y_1 = 0$
- $y_2 = y_2$
- $y_3 = 1 - y_2$

Mixed Strategies

Reduced Payoff Table for Variation III

Probability			Player II		
			$y_1 = 0$	$y_2 = y_2$	$y_3 = 1 - y_2$
Probability		Pure strategy	1	2	3
Player I	x_1	1	0	-2	2
	x_2	2	5	4	-3

Mixed Strategies

(x_1, x_2)	Expected Payoff
(1, 0)	$-2y_2 + 2(1 - y_2) = 2 - 4y_2$
(0, 1)	$4y_2 - 3(1 - y_2) = -3 + 7y_2$

Mixed Strategies

$$2-4y_2=-3+7y_2$$
$$11y_2=5$$
$$y_2=5/11$$
$$y_3=1-y_2$$
$$=1-5/11$$
$$=6/11$$

$$\bar{v}=2-4y_2$$
$$=2-4(5/11)$$
$$=2/11$$
$$\bar{v}=-3+7y_2$$
$$=-3+7(5/11)$$
$$=2/11$$

Mixed Strategies

- Strategi campuran yang dipilih player 1 = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (7/11, 4/11, 0)
- Strategi campuran yang dipilih player 2 = (y_1^*, y_2^*, y_3^*) = (0, 5/11, 6/11)
- Nilai game optimal = v* = 2/11

Mixed Strategies

- Permasalahan Two Person Zero Sum Games dapat diselesaikan dengan metode graphical bila tabel payoff membentuk matriks 2 x n atau m x 2
- Permasalahan Two Person Zero Sum Games dengan tabel payoff yang membentuk matriks m x n dapat diselesaikan dengan linier programming

Mixed Strategies
Contoh: m x 2

Besar Kemenangan Player I

Strategi		Player II 1	Player II 2	Minimum	
Player I	1	2	4	2	} → maximin
	2	2	3	2	
	3	5	3	3	
	4	-2	6	-2	
Maksimum		5	6		

↓
Minimax

Mixed Strategies
Contoh: m x 2

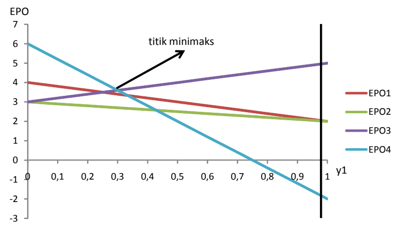
Besar Kemenangan Player I

Probabilitas			Player II y_1	Player II $y_2 = 1 - y_1$	Minimum
Probabilitas		PS	1	2	
Player I	x_1	1	2	4	2
	x_2	2	2	3	2
	x_3	3	5	3	3
	x_4	4	-2	6	-2
Maksimum			5	6	

Mixed Strategies
Contoh: m x 2

(x_1, x_2, x_3, x_4)	Expected Payoff
(1, 0, 0, 0)	$2y_1 + 4(1 - y_1) = 4 - 2y_1$
(0, 1, 0, 0)	$2y_1 + 3(1 - y_1) = 3 - y_1$
(0, 0, 1, 0)	$5y_1 + 3(1 - y_1) = 3 + 2y_1$
(0, 0, 0, 1)	$-2y_1 + 6(1 - y_1) = 6 - 8y_1$

Mixed Strategies
Contoh: m x 2



Mixed Strategies
Contoh: m x 2

$$\begin{aligned} 3+2y_1 &= 6-8y_1 \\ 10y_1 &= 3 \\ y_1 &= \tfrac{3}{10} = 0{,}3 \\ y_2 &= 1-y_1 \\ &= 1-0{,}3 \\ &= 0{,}7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{v} &= 3+2y_1 \\ &= 3+2(0{,}3) \\ &= 3{,}6 \\ \overline{v} &= 6-8y_1 \\ &= 6-8(0{,}3) \\ &= 3{,}6 \end{aligned}$$

Mixed Strategies
Contoh: m x 2

- Titik minimax untuk player II dihasilkan dari perpotongan antar grafik EPO player II jika player I memilih pure strategy 3 dan 4
- $x_1 = 0$
- $x_2 = 0$
- $x_3 = x_3$
- $x_4 = 1 - x_3$

Mixed Strategies
Contoh: m x 2

Besar Kemenangan Player I

Probability			Player II	
			y_1	y_2
	Probability	Pure strategy	1	2
Player I	$x_1 = 0$	1	2	4
	$x_2 = 0$	2	2	3
	$x_3 = x_3$	3	5	3
	$x_4 = 1 - x_3$	4	-2	6

Mixed Strategies
Contoh: m x 2

(y_1, y_2)	Expected Payoff
(1, 0)	$5x_3 - 2(1 - x_3) = -2 + 7x_3$
(0, 1)	$3x_3 + 6(1 - x_3) = 6 - 3x_3$

Mixed Strategies
Contoh: m x 2

$$\begin{aligned} -2+7x_3 &= 6-3x_3 \\ 10x_3 &= 8 \\ x_3 &= \tfrac{8}{10} = 0{,}8 \\ x_4 &= 1-x_2 \\ &= 1-0{,}8 \\ &= 0{,}2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{v} &= -2+7x_3 \\ &= -2+7(0{,}8) \\ &= 3{,}6 \\ \underline{v} &= 6-3x_3 \\ &= 6-3(0{,}8) \\ &= 3{,}6 \end{aligned}$$

Mixed Strategies
Contoh: m x 2

- Strategi campuran yang dipilih player 1 = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (0; 0; 0,8; 0,2)
- Strategi campuran yang dipilih player 2 = (y_1^*, y_2^*) = (0,3; 0,7)
- Nilai game optimal = v* = 3,6

GAME THEORY

LINEAR PROGRAMMING

Linier Programming

- Untuk permasalahan Two Person Zero Sum Games dengan matriks payoff
  m x n

Linier Programming: Player I

$$\min z = \left(-x_{m+1}\right) + K$$

$$ST$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij} x_i - x_{m+1} \geq 0;\ j = 1,2,\ldots,n$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) = -1$$

$$x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,m$$

Linier Programming: Player II

$$\max z = \left(-y_{n+1}\right) + K$$

$$ST$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} y_j - y_{n+1} \leq 0; i = 1,2,\ldots,m$$

$$-\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) = -1$$

$$y_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,n$$

Linier Programming

Tabel Payoff Player I

Strategi		Player II			Minimum
		1	2	3	
Player I	1	3	-1	-3	-3
	2	-3	3	-1	-3
	3	-4	-3	3	-4
Maksimum		3	3	3	

Linier Programming

- Nilai maximin positif
  - K = 0
- Nilai maximin negatif
  - **K ≥ |nilai maximin|**
  - Maximin = -3 ≤ 0 (ada kemungkinan nilai v ≤ 0) → no feasible solution
  - Ditambahkan konstanta K, dimana = |-3| = 3
  - Misal: K = 5

Linier Programming

Tabel Payoff Player I

Strategi		Player II		
		1	2	3
Player I	1	8	4	2
	2	2	8	4
	3	1	2	8

Linier Programming: Player I

$$\max z = x_4 - K$$

$$ST$$

$$p_{11}x_1 + p_{21}x_2 + p_{31}x_3 - x_4 \geq 0$$
$$p_{12}x_1 + p_{22}x_2 + p_{32}x_3 - x_4 \geq 0$$
$$p_{13}x_1 + p_{23}x_2 + p_{33}x_3 - x_4 \geq 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_i \geq 0, i = 1,2,3$$

Linier Programming: Player I

$$\max z = x_4 - 5$$

$$ST$$

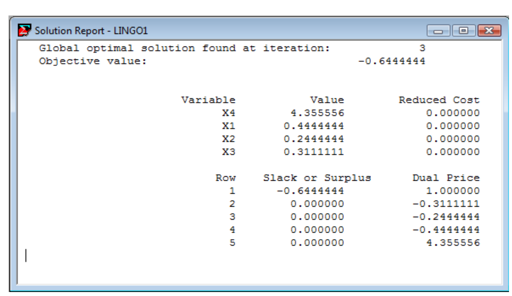
$$8x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \geq 0$$
$$4x_1 + 8x_2 + 2x_3 - x_4 \geq 0$$
$$2x_1 + 4x_2 + 8x_3 - x_4 \geq 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_i \geq 0, i = 1,2,3$$

LINGO

```
max = x4 - 5;

 8*x1 + 2*x2 +   x3 - x4 >= 0;
 4*x1 + 8*x2 + 2*x3 - x4 >= 0;
 2*x1 + 4*x2 + 8*x3 - x4 >= 0;
   x1 +   x2 +   x3      = 1;
```

LINGO



```
Solution Report - LINGO1
   Global optimal solution found at iteration:              3
   Objective value:                                -0.6444444

                        Variable           Value        Reduced Cost
                              X4        4.355556            0.000000
                              X1       0.4444444            0.000000
                              X2       0.2444444            0.000000
                              X3       0.3111111            0.000000

                             Row    Slack or Surplus      Dual Price
                               1      -0.6444444            1.000000
                               2        0.000000          -0.3111111
                               3        0.000000          -0.2444444
                               4        0.000000          -0.4444444
                               5        0.000000            4.355556
```

Linier Programming: Player II

$$\min z = y_4 - K$$

$$ST$$

$$p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + p_{13}y_3 - y_4 \le 0$$
$$p_{21}y_1 + p_{22}y_2 + p_{23}y_3 - y_4 \le 0$$
$$p_{31}y_1 + p_{32}y_2 + p_{33}y_3 - y_4 \le 0$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$
$$y_j \ge 0,\ j = 1,2,\ldots,n$$

Linier Programming: Player II

$$\min z = y_4 - 5$$

$$ST$$

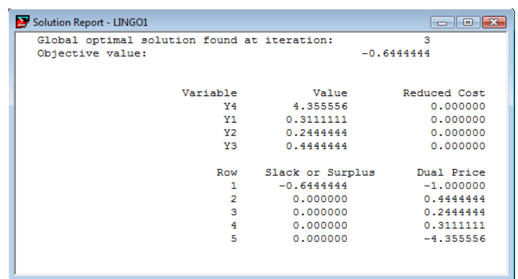
$$8y_1 + 4y_2 + 2y_3 - y_4 \le 0$$
$$2y_1 + 8y_2 + 4y_3 - y_4 \le 0$$
$$y_1 + 2y_2 + 8y_3 - y_4 \le 0$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$
$$y_j \ge 0,\ j = 1,2,\ldots,n$$

LINGO

```
min = y4 - 5;

 8*y1 + 4*y2 + 2*y3 - y4 <= 0;
 2*y1 + 8*y2 + 4*y3 - y4 <= 0;
   y1 + 2*y2 + 8*y3 - y4 <= 0;
   y1 +   y2 +   y3      = 1;
```

LINGO



```
Solution Report - LINGO1
  Global optimal solution found at iteration:           3
  Objective value:                               -0.6444444

                       Variable           Value        Reduced Cost
                             Y4        4.355556            0.000000
                             Y1       0.3111111            0.000000
                             Y2       0.2444444            0.000000
                             Y3       0.4444444            0.000000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1      -0.6444444           -1.000000
                              2        0.000000           0.4444444
                              3        0.000000           0.2444444
                              4        0.000000           0.3111111
                              5        0.000000           -4.355556
```

Hasil

- V = -0,6444
- (x1, x2, x3) = (0,4444; 0,2444; 0,3111)
- (y1, y2, y3) = (0,3111; 0,2444; 0,4444)

Soal

Strategi		Pemain II				
		1	2	3	4	5
Pemain I	1	-2	2	1	0	-1
	2	2	1	4	-1	0
	3	2	2	-1	-2	-3
	4	-1	4	0	1	2
	5	-3	6	-2	2	4

Soal

Strategi		Pemain II				
		1	2	3	4	5
Pemain I	1	-2	2	1	0	-1
	2	2	1	4	-1	0
	3	2	2	-1	-2	-3
	4	-1	4	0	1	2
	5	-3	6	-2	2	4

Soal

Strategi		Pemain II	
		1	4
Pemain I	2	2	-1
	4	-1	1
	5	-3	2

Soal: jawab

- Pemain I = (0; 2/5; 0; 3/5; 0)
- Pemain 2 = (2/5; 0; 0; 3/5; 0)
- Payoff = v* = 1/5

References

- Hillier, Frederick and Lieberman, Gerald J., Introduction to Operations Research, 7th ed, McGraw-Hill, New York, 2001.
- Taha, Hamdy, Operation Research : An Introduction, 8th ed, Pearson Education Inc., NJ, 2007.
- Winston, Wayne L., Operations Research: Application & Algorithms, 4th ed, Thomson Learning, Belmont – CA, 2003.