



Lecture 10



PENELITIAN OPERASIONAL I

(TIN 4109)

INTEGER PROGRAMMING

Lecture 10



- **Outline:**
 - Integer Programming: Branch & Bound
- **References:**
 - Frederick Hillier and Gerald J. Lieberman. *Introduction to Operations Research*. 7th ed. The McGraw-Hill Companies, Inc, 2001.
 - Hamdy A. Taha. *Operations Research: An Introduction*. 8th Edition. Prentice-Hall, Inc, 2007.
 - Winston, Wayne L. *Operations Research: Applications and Algorithms*. 3rd edition. Wadsworth Inc.1994.

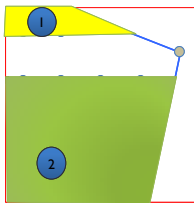
INTEGER PROGRAMMING

BRANCH & BOUND METHOD

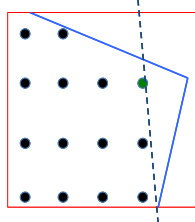
Metode Penyelesaian ILP



Branch and Bound



Cutting Plane Method.



Metode Branch and Bound



- Metode yang paling sering digunakan untuk menyelesaikan ILP adalah Branch and Bound.
- Langkah utama dalam metode Branch and Bound.
 - Batasi (*Bound*)
 - Batas Atas (*Upper Bound*)
 - Batas Bawah (*Lower Bound*)
 - Pencabangan Cabang (*Branching*)
 - Penghentian Cabang (*Fathoming*)

Branching



- Pencabangan dilakukan jika masih terdapat variabel keputusan yang harus bernilai integer namun memiliki solusi yang tidak integer.
- Pencabangan dilakukan dengan cara menambahkan pembatas pada masalah asli. Penambahan pembatas ini ditujukan untuk membuat variabel keputusan yang belum bernilai integer supaya bernilai integer.

Penetapan Batas (*Bounding*)



- Pada algoritma *branch and bound* terdapat dua batas yaitu batas atas (upper bound) dan batas bawah (lower bound).
- Pada masalah maksimisasi:
 - batas atas merupakan solusi ILP relaksasi dari sub masalah tersebut sedangkan batas bawahnya adalah nilai dari sub masalah tersebut ataupun solusi dari sub masalah lain yang semua variabel keputusan yang harus bernilai integer sudah bernilai integer. → solusi **terbaik** yang **sejauh ini** diperoleh

Penetapan Batas (*Bounding*)



- Pada masalah minimisasi:
 - batas bawah merupakan solusi ILP relaksasi dari sub masalah tersebut, sedangkan batas atasnya adalah nilai dari sub masalah tersebut ataupun solusi dari sub masalah lain yang semua variabel keputusan yang harus bernilai integer sudah bernilai integer. → solusi terkecil (**terbaik**) yang **sejauh ini** diperoleh

Penghentian pencabangan (*Fathoming*)



Pencabangan atau pencarian solusi pada suatu sub masalah dihentikan jika:

- *Infeasible* atau tidak mempunyai daerah layak.
- Semua variabel keputusan yang harus bernilai integer sudah bernilai integer
- Pada masalah maksimisasi, penghentian pencabangan pada suatu sub masalah dilakukan jika batas atas dari sub masalah tersebut tidak lebih besar atau sama dengan batas bawah.
- Sedangkan pada masalah minimisasi penghentian pencabangan pada suatu sub masalah dilakukan jika batas bawah tidak lebih kecil atau sama dengan batas atas.

Kondisi Optimal



- Jika tidak ada lagi sub masalah yang perlu dicabangkan lagi maka solusi optimal sudah diperoleh.
- Pada masalah maksimisasi solusi optimal merupakan solusi submasalah yang saat ini menjadi batas bawah (*lower bound*)
- Pada masalah minimisasi solusi optimal merupakan solusi submasalah yang saat ini menjadi batas atas (*upper bound*)

Branch and Bound



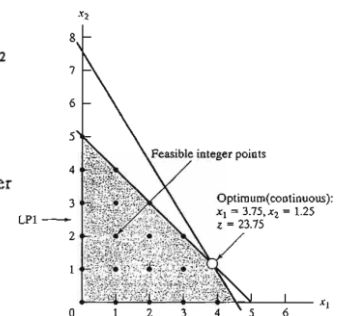
- Contoh:

$$\text{Maximize } z = 5x_1 + 4x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

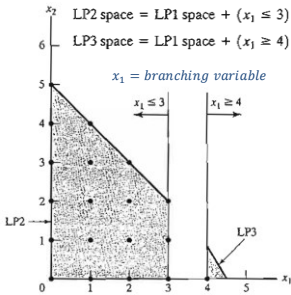
x_1, x_2 nonnegative integer



Branch and Bound



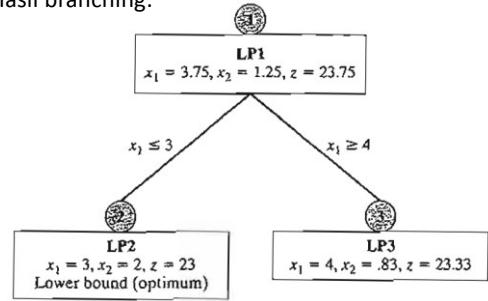
- Pilih salah satu solusi (acak) yang tidak integer
- Eliminasi daerah yang tidak akan memberikan hasil integer
- Hasil eliminasi menggantikan LP awal
- Menyelesaikan masing2 LP dengan batasan baru tetap fungsi tujuan sama



Branch and Bound



- Hasil branching:

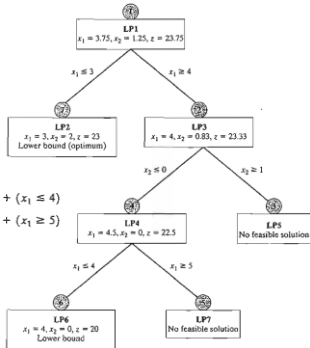


Branch and Bound



- Fathom LP3

- LP4 space = LP3 space + ($x_2 \leq 0$) = LP1 space + ($x_1 \geq 4$) + ($x_2 \leq 0$)
- LP5 space = LP3 space + ($x_2 \geq 1$) = LP1 space + ($x_1 \geq 4$) + ($x_2 \geq 1$)
- LP6 space = LP1 space + ($x_1 \geq 4$) + ($x_2 \leq 0$) + ($x_1 \leq 4$)
- LP7 space = LP1 space + ($x_1 \geq 4$) + ($x_2 \leq 0$) + ($x_1 \geq 5$)



Latihan Soal



- Selesaikan dengan menggunakan metode B&B:

- Maximize $z = 3x_1 + 2x_2$
s.t $2x_1 + 2x_2 \leq 9$
 $3x_1 + 3x_2 \geq 18$
 $x_1, x_2 \geq \text{nonnegative integer}$
- Minimize $z = 5x_1 + 4x_2$
s.t $3x_1 + 2x_2 \geq 5$
 $2x_1 + 3x_2 \geq 7$
 $x_1, x_2 \geq \text{nonnegative integer}$

Lecture 11 – Preparation



- Materi:
 - Binary Integer Programming
 - IP dengan Software

SEE YOU