PENELITIAN OPERASIONAL I

(TIN 4109)

Lecture 5

LINEAR PROGRAMMING

Lecture 5

- **Outline:**
  - Simplex Method: Metode 2 Fase
  - Special Case dalam Simplex
- **References:**
  - Frederick Hillier and Gerald J. Lieberman. *Introduction to Operations Research*. 7th ed. The McGraw-Hill Companies, Inc, 2001.
  - Hamdy A. Taha. *Operations Research: An Introduction*. 8th Edition. Prentice-Hall, Inc, 2007.

Simplex Method:
Two-Phase Method

- Membagi penyelesaian LP dalam 2 fase:
  - Fase 1:
    - mencari basic feasible solution awal, dengan me-nol kan artificial variable
  - Fase 2:
    - menyelesaikan permasalahan original dengan persamaan baru berdasarkan hasil dari Fase 1
- Tetap menggunakan artificial variable

Two-Phase Method:
Contoh Soal

Minimize $z = 4x_1 + x_2$

subject to

$$3x_1 + x_2 = 3$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

FASE 1

Minimize $r = R_1 + R_2$

subject to

$$3x_1 + x_2 + R_1 = 3$$
$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + R_2 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, R_1, R_2 \geq 0$$

Two-Phase Method:
Contoh Soal

	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solusi
r	0	0	0	-1	-1	0	0
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
x_4	1	2	0	0	0	1	4

$New\ r - row = Old\ r - row + (1xR_1 - row + 1xR_2 - row)$

	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solusi
r	7	4	-1	0	0	0	9
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
x_4	1	2	0	0	0	1	4

Hasil Optimal:

$x_1 = \frac{3}{5}, x_2 = \frac{6}{5}, x_4 = 1$

Two-Phase Method:
Contoh Soal

	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solusi
r	0	0	0	-1	-1	0	0
x_1	1	0	1/5	3/5	-1/5	0	3/5
x_2	0	1	-3/5	-4/5	3/5	0	6/5
x_4	0	0	1	1	-1	1	1

FASE 2 Minimize $z = 4x_1 + x_2$

subject to

$$x_1 + \tfrac{1}{5}x_3 = \tfrac{3}{5}$$
$$x_2 - \tfrac{3}{5}x_3 = \tfrac{6}{5}$$
$$x_3 + x_4 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	Solusi
r	0	0	0	0	0
x_1	1	0	1/5	0	3/5
x_2	0	1	-3/5	0	6/5
x_4	0	0	1	1	1

Two-Phase Method:
Contoh Soal

	x_1	x_2	x_3	x_4	Solusi
z	-4	-1	0	0	0
x_1	1	0	1/5	0	3/5
x_2	0	1	-3/5	0	6/5
x_4	0	0	1	1	1

$New\ r-row = Old\ r-row + (4 * x_1 - row + 1 * x_2 - row)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	Solusi
z	0	0	1/5	0	18/5
x_1	1	0	1/5	0	3/5
x_2	0	1	-3/5	0	6/5
x_4	0	0	1	1	1

Two-Phase Method:
Contoh Soal

	x_1	x_2	x_3	x_4	Solusi
z	0	0	1/5	0	18/5
x_1	1	0	1/5	0	3/5
x_2	0	1	-3/5	0	6/5
x_4	0	0	1	1	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	Solusi
z	0	0	0	-1/5	17/5
x_1	1	-1/5	0	-1/5	2/5
x_2	0	-8/5	0	3/5	9/5
x_3	0	0	1	1	1

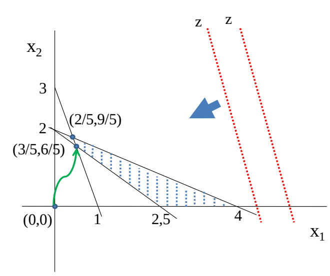
Hasil Optimal:
$x_1 = \frac{2}{5}, x_2 = \frac{9}{5}, z = \frac{17}{5}$

Two-Phase Method

Minimize $z = 4x_1 + x_2$

subject to

$$3x_1 + x_2 = 3$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



Simplex Method:
Two-Phase Method

- **Langkah-langkah**:
  - **Fase 1**:
    - Buat bentuk persamaan pada permasalahan LP dengan menambah artificial variable untuk semua kontrain atau kendala yang ada.
    - Bentuk fungsi tujuan menjadi: $\boldsymbol{Minimize\ r = \sum R_i}$. Berlaku **untuk fungsi tujuan maksimasi ataupun minimasi**.
    - Jika hasil penjumlahan **artificial variable** bernilai **positif**, artinya permasalahan LP **tidak memiliki feasibel solution**.
    - Optimal solution diperoleh pada saat $\boldsymbol{r = 0}$.
    - Hasil dari solusi optimal Fase 1 menjadi Basic Feasible *real problem* yang diselesaikan pada Fase 2.

Simplex Method:
Two-Phase Method

- **Langkah-langkah**:
  - **Fase 2**:
    - Bertujuan untuk memperoleh optimal solution *real problem*.
    - Drop artificial variable (telah bernilai nol pada Fase 1).
    - Basic Feasible dari Fase 1 diselesaikan dengan metode simplex.

Two-Phase Method:
Catatan!!!

- Menghilangkan artificial variable pada Fase 2 hanya bisa dilakukan jika artificial variable menjadi non basic variable.
- Jika tidak (*salah satu atau lebih dari artificial variable masih menjadi basic variable dengan nilai 0*), lakukan langkah berikut:
  - **Langkah 1:** Pilih ***nol artificial variable*** tersebut sebagai ***leaving variable***, dan menunjuk baris tersebut sebagai baris pivot. Pilih ***nonbasic (nonartificial) variable*** dengan ***nonzero*** (+ / -) koefisien sebagai ***entering variable***. Lakukan iterasi simplex.
  - **Langkah 2:** Hilangkan kolom ***artificial variable yang baru*** dari tabel. Jika semua ***nol artificial variable*** dihilangkan, lanjutkan ke Fase 2. Jika belum, kembali ke **Langkah 1**.

Latihan Soal

1. Minimize $z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$

s.t.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$
$$2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

2. Maximize $z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$

s.t.

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Simplex Method:
Special Cases

- Degeneracy
- Alternative optima
- Unbounded solutions
- Nonexisting (or infeasible) solutions

Simplex Method:
Special Cases – **Degeneracy**

- Degeneracy
  - Terjadi cycling dalam iterasi metode simplex
  - Sedikitnya terdapat satu redundant constraint
  - **Contoh:**

Maximize $z = 3x_1 + 9x_2$

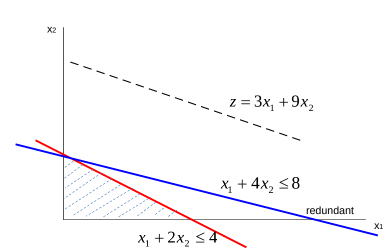
Subject to

$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 1$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

Simplex Method:
Special Cases – **Degeneracy**

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	Solusi
z	1	-3	-9	0	0	0
x_3	0	1	4	1	0	8
x_4	0	1	2	0	1	4
z	1	-3/4	0	9/4	0	18
x_2	0	¼	1	¼	0	2
x_4	0	½	0	-½	2	0
	1	0	0	3/2	3/2	18
x_2	0	0	1	½	-½	2
x_1	0	1	0	-1	2	0

Simplex Method:
Special Cases – **Degeneracy**



Simplex Method:
Special Cases – **Alternative optima**

- Alternative optima
  - Fungsi tujuan paralel dengan salah satu konstrain yang paling menentukan solusi
  - Terdapat lebih dari satu solusi optimal
  - **Contoh**

Maximize $z = 2x_1 + 4x_2$

Subject to

$x_1 + 2x_2 \leq 5$

$x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

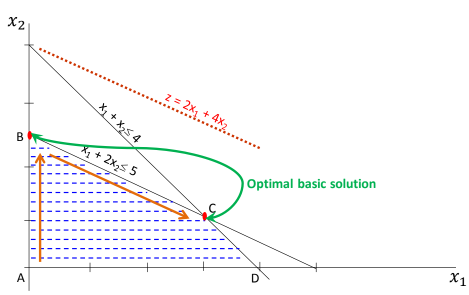
Simplex Method:
Special Cases – **Alternative optima**

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	Solusi
z	1	-2	-4	0	0	0
x_3	0	1	2	1	0	5
x_4	0	1	1	0	1	4

z	1	0	0	2	0	10
x_2	0	½	1	½	0	5/2
x_4	0	½	0	-½	1	3/2

	1	0	0	2	0	10
x_2	0	0	1	1	-1	1
x_1	0	1	0	-1	2	3

Simplex Method:
Special Cases - **Alternative optima**



Simplex Method:
Special Cases – **Unbounded solution**

- Unbounded solution
  - Tidak ada variabel pembatas
  - Hasil fungsi tujuan bertambah (maksimasi) atau berkurang (minimasi) tanpa batas
  - **Contoh**

Maximize $z = 2x_1 + x_2$

Subject to

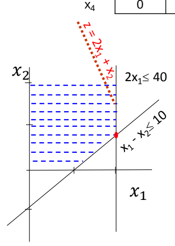
$x_1 - x_2 \leq 10$

$2x_1 \quad \leq 40$

$x_1, x_2 \geq 0$

Simplex Method:
Special Cases – **Unbounded solution**

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	Solusi
z	1	-2	-1	0	0	0
x_3	0	1	-1	1	0	10
x_4	0	2	0	0	1	40



Simplex Method:
Special Cases – **Infeasible solution**

- Infeasible solution
  - *Inconsistent constraints*
  - Tidak terjadi bila semua kontrain bertanda ≤
  - **Contoh**

Maximize $z = 3x_1 + 2x_2$

Subject to

$2x_1 + x_2 \leq 2$

$3x_1 + 4x_2 \geq 12$

$x_1, x_2 \geq 0$

Simplex Method:
Special Cases – **Infeasible solution**

	z	x_1	x_2	x_4	x_3	R	Solusi
z	1	-303	-402	100	0	0	-1200
x_3	0	2	1	0	1	0	2
R	0	3	4	-1	0	1	12

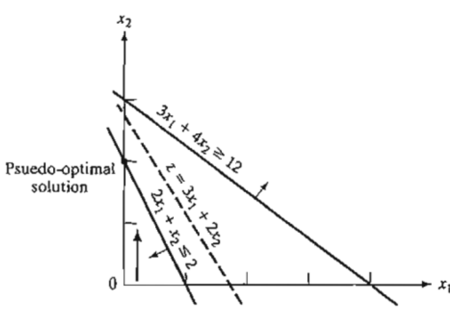
z	1	501	0	100	402	0	-396
x_2	0	2	1	0	3	0	2
R	0	-5	0	-1	-4	1	4

Simplex Method:
Special Cases – **Infeasible solution**

	z	x_1	x_2	x_4	x_3	R	Solusi
z	1	-303	-402	100	0	0	-1200
x_3	0	2	1	0	1	0	2
R	0	3	4	-1	0	1	12

z	1	501	0	100	402	0	-396
x_2	0	2	1	0	3	0	2
R	0	-5	0	-1	-4	1	4

Simplex Method:
Special Cases – **Infeasible solution**

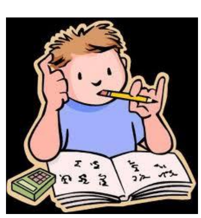


TUGAS

- **Tugas:**
  - Tentukan satu studi kasus yang dapat diselesaikan dengan menggunakan ILP.
  - Selesaikan permasalahan tersebut dengan menggunakan software lindo/lingo, excel, dan matlab
- **Dasar Penilaian:**
  - Kompleksitas kasus
  - Ketepatan langkah
  - Hasil akhir
  - *Pemahaman (dinilai pada saat presentasi)*
- **Ketentuan:**
  - Tugas kelompok. Anggota maksimal 3 orang.
  - Obyek kasus dan nilai parameter ataupun koefisien tidak boleh sama antar kelompok.
  - Format laporan: PPT (kasus, langkah-langkah, kode (bahasa program yang digunakan)
  - Pengumpulan tugas: email ke agustina.eunike@ub.ac.id
  - Deadline: 31 oktober 2013, jam 00.00 am

Lecture 6 – QUIZ 1

- **Materi:**
  - Linier Programming:
    - Metode grafis
    - Metode simplex:
      - Konsep dasar
      - *M-Method*
      - *Two-phase Method*
      - Kasus khusus



SELAMAT BELAJAR