STATISTIK INDUSTRI 1

Agustina Eunike, ST., MT., MBA

Probabilitas

PELUANG

- Eksperimen
  - Aktivitas / pengukuran / observasi suatu fenomena yang bervariasi outputnya
- Ruang Sampel / *Sample Space*
  - Semua output yang mungkin dari suatu eksperimen
- Kejadian / *Event*
  - Satu atau lebih kemungkinan output dari suatu eksperimen; subset (bagian) dari ruang sampel
- Peluang / *Probability*
  - Nilai antara 0 dan 1 yang menggambarkan peluang suatu *event* (kejadian) akan terjadi

- Kejadian:
  - Komplemen
    - Seluruh elemen dalam ruang sampel yang tidak termasuk dalam kejadian amatan
    - Notasi: A'
      - Seluruh elemen dalam ruang sampel yang tidak masuk dalam kejadian A
  - Irisan
    - Beberapa kejadian dinyatakan beririsan jika terdapat elemen yang sama pada kejadian-kejadian tersebut
    - Notasi: $A \cap B$
      - Kejadian A beririsan dengan kejadian B
  - Kejadian Terpisah / Bebas
    - Kejadian-kejadian yang tidak memiliki elemen yang sama
    - Notasi: $A \cap B = \emptyset$
      - Kejadian A dan kejadian B adalah kejadian terpisah
  - Gabungan
    - Gabungan seluruh elemen beberapa kejadian
    - Notasi: $A \cup B$
      - Gabungan seluruh elemen kejadian A dan kejadian B

- Menghitung Titik Sampel

  Peluang dapat diselesaikan dengan mengetahui jumlah titik (pilihan) dalam ruang sampel tanpa membuat daftar elemennya. Berlaku untuk:

  - Gabungan dua atau lebih operasi yang sama dalam satu kejadian
  - Gabungan dua atau lebih operasi yang berbeda dalam satu kejadian
  - Gabungan dua atau lebih operasi, dimana operasi satu merupakan percabangan cara dari operasi yang lain

  – Dasar yang digunakan adalah *"aturan perkalian"*

  – Rumus: $n_1 n_2 n_3 \ldots n_k$

  - $n_1 = jumlah\ cara\ pada\ operasi\ 1$
  - $n_2 = jumlah\ cara\ pada\ operasi\ 2$
  - $n_k = jumlah\ cara\ pada\ operasi\ k$

- Menghitung Titik Sampel
  - Permutasi
    - Penyusunan (**memperhatikan urutan**) yang dapat dibentuk dari sebagian atau keseluruhan obyek amatan
    - Permutasi n obyek: $n!$
    - Permutasi n obyek yang diambil sejumlah r sekaligus (${}_nP_r$): $\frac{n!}{(n-r)!}$
    - Permutasi n obyek disusun melingkar: $(n-1)!$
    - Permutasi n obyek dengan diantaranya ada yang berjenis sama: $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_k!}$
      - n obyek, n_1 jumlah obyek 1 yang sama, n_k jumlah obyek k yang sama

- Menghitung Titik Sampel
  - Penyekatan / Partisi / *Partitioning*
    - Penempatan (**tanpa memperhatikan urutan**) n obyek dalam r sel
    - Syarat: tidak ada irisan antar r sel, dan gabungan r sel adalah total himpunan n obyek
    - Rumus: $\begin{bmatrix} n \\ n_1, n_2, \dots, n_r \end{bmatrix} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}; n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$
  - Kombinasi
    - Penyusunan r obyek dari total n obyek yang dapat dibentuk (**tanpat memperhatikan urutan**)
    - Sekatan dua sel: sel $1 = r$ elemen, sel $2 = n - r$ elemen
    - Rumus: $\begin{bmatrix} n \\ r, n-r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

- Probabilitas / Peluang suatu kejadian
  - Peluang kejadian A adalah total bobot titik sampel yang termasuk pada A

$$0 \leq P(A) \leq 1, \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(S) = 1$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots$$

- $A = Kejadian/Event$
- $S = Ruang\ Sample$
- $\mathrm{P}(A) = Probablitas\ Event\ A$
- $A_i = Urutan\ kejadian\ bebas/terlepas$
- $A' = Komplemen\ A$
- $P(A) + P(A') = 1$

  - P(B) = 0; kejadian yang tidak mungkin terjadi
  - P(C) = 1; kejadian yang pasti terjadi

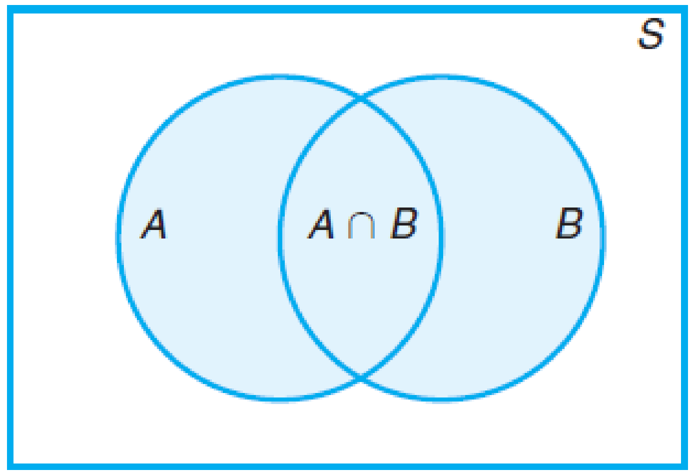
- Probabilitas / Peluang suatu kejadian
  - Klasik

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

    - $n: jumlah\ elemen\ dalam\ kejadian\ A$
    - $N: jumlah\ elemen\ dalam\ ruang\ sampel$
  - Frekuensi Relatif
    - $n: jumlah\ percobaan\ yang\ terjadi\ dalam\ suatu\ kejadian$
    - $N: jumlah\ total\ percobaan$
  - Subyektif
    - kepercayaan atau insting

- Aturan Penjumlahan

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



$$P(A \cup B \cup C)$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C)$$
$$- P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$
$$P(A) + P(A') = P(S) = P(A \cup A')$$

  - Kejadian bebas:

$$P(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = P(S) = 1$$

- Probabilitas Bersyarat
  - $P(B|A)$:
    peluang kejadian B terjadi setelah kejadian A terjadi

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \qquad P(A) > 0$$

- Probabilitas Kejadian Independen

$$P(B|A) = P(B) \quad atau \quad P(A|\mathrm{B}) = P(A)$$

Probabilitas Kejadian Independen terjadi bersamaan

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
$$P(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \ldots P(A_n)$$

- Aturan Perkalian

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$
$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B)P(A|B)$$

Latihan Soal

- Joni akan lulus dari TI UB semester ini. Setelah wawancara di 2 perusahaan yang diinginkan, dia memperkirakan peluang diterima di perusahaan A adalah 0.8, dan peluang diterima di perusahaan B adalah 0.6, sedangkan diterima di kedua perusahaan tersebut adalah 0.5. Berapakah peluang Joni diterima paling tidak di salah satu perusahaan tersebut?
- Jika terdapat 2 dadu dilempar bersamaan. A adalah kejadian terjadinya kemunculan jumlah 7. B adalah kejadian terjadinya kemunculan jumlah 11. Berapakah P(AUB)?
- Peluang seseorang membeli mobil berwarna hijau, putih, merah, dan biru secara berturutan adalah 0.09, 0.15, 0.21, dan 0.23. Berapakah peluang Bapak “X” membeli salah satu mobil dengan salah satu warna tersebut?
- Bila peluang seorang montir mobil akan memperbaiki 3, 4, 5, 6, 7, dan 8 lebih mobil pada setiap hari kerja, masing-masing 0.12, 0.19, 0.28, 0.24, 0.10, dan 0.07, berapakah peluang bahwa dia akan memperbaiki paling sedikit 5 mobil pada hari kerja berikutnya?

Latihan Soal

- Peluang suatu penerbangan yang telah terjadwal teratur berangkat tepat waktu $P(B)=0.83$, peluang sampai tepat waktu $P(S)=0.82$, dan peluang berangkat dan sampai tepat waktu $P(B \cap S)=0.78$. Cari peluang pesawat:
  - Sampai tepat waktu bila diketahui berangkat tepat waktu.
  - Berangkat tepat waktu jika diketahui sampai tepat waktu
- Misalkan kita memiliki kotak berisi 20 sekering, 5 diantaranya cacat. Bila dua sekering dikeluarkan dari satu kotak satu demi satu secara acak (tanpa mengembalikan yang pertama ke dalam kotak), berapakah peluang kedua sekering itu cacat?
- Suatu kota kecil mempunyai satu mobil pemadam kebakaran dan satu ambulans untuk keadaan darurat. Peluang mobil pemadam kebakaran siap waktu diperlukan 0.98, peluang ambulans siap waktu dipanggil 0.92. Dalam kejadian ada kecelakaan karena kebakaran gedung, cari peluang kedua siap.

Contoh Soal

- Misalkan A1, A2, B1, dan B2 masing-masing menyatakan kejadian bebas bahwa jumlah 7 muncul dalam lemparan 2 dadu pertama, jumlah 7 muncul dalam lemparan 2 dadu kedua, jumlah 11 muncul dalam lemparan 2 dadu pertama, jumlah 11 muncul dalam lemparan 2 dadu kedua. Hitung $P[(A1 \cap B2) \cup (B1 \cap A2)]$.
- **Jawab:**
  - $P[(A1 \cap B2) \cup (B1 \cap A2)] = P(A1 \cap B2) + P(B1 \cap A2)$

$$= P(A1)\,P(B2) + P(B1)\,P(A2)$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{18}\right) + \left(\frac{1}{18}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{54}$$

Contoh Soal

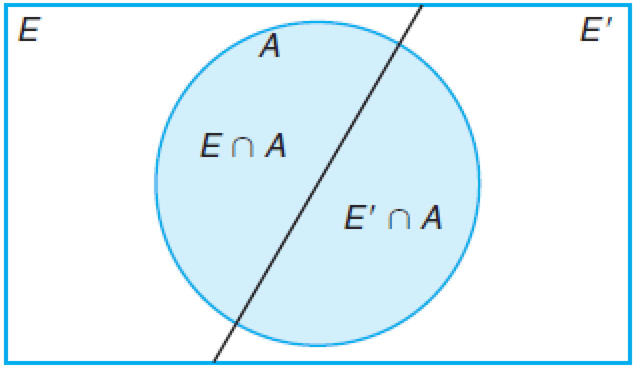
- Tiga kartu diambil satu demi satu tanpa pengembalian dari sekotak kartu (berisi 52). Cari P(A1 ∩ A2∩A3). A1: kartu as warna merah. A2: kartu kedua suatu 10 atau jack. A3: kartu ketiga lebih besar dari 3 tapi lebih kecil dari 7.
- **Jawab:**
  - $P(A1) = \frac{2}{52}$
  - $P(A2|A1) = \frac{8}{51}$
  - $P(A3|A1 \cap A2) = \frac{12}{50}$
  - $P(A1 \cap A2 \cap A3) = P(A1)\, P(A2|A1)\, P(A3|A1 \cap A2)$

$$= \left(\frac{2}{52}\right)\left(\frac{8}{51}\right)\left(\frac{12}{50}\right)$$

$$= \frac{8}{5525}$$

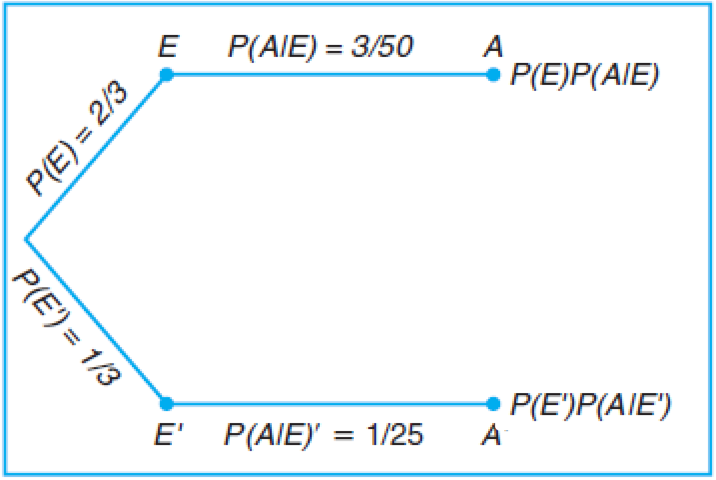
JOIN UB BE THE BEST UB UNIVERSITY of BRAWIJAYA

- Aturan Bayes
  - **Pengantar:**



- $P(A) = P[(E \cap A) \cup (E' \cap A)]$
- $P(A) = P(E \cap A) + P(E' \cap A)$
- $P(A) = P(E)P(A|E) + P(E')P(A|E')$

Pada contoh soal Warga yang Bekerja (E) dan tidak bekerja (E'), dimisalkan ada yang tergabung pada suatu klub futsal (A). Diketahui warga yang bekerja adalah 600 orang dari 900 total warga. 36 orang bekerja tersebut tergabung dalam klub futsal, dan 12 orang dalam klub adalah tidak bekerja. Maka dapat dilakukan perhitungan sebagai berikut:

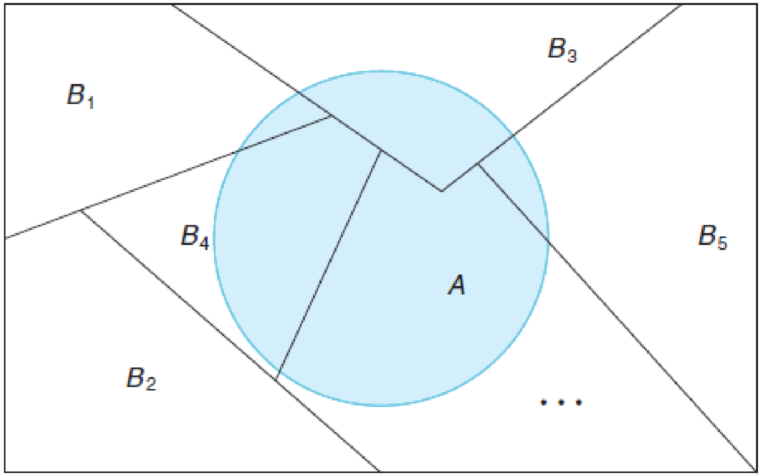


$$P(E) = \frac{600}{900} = \frac{2}{3}, \quad P(A|E) = \frac{36}{600} = \frac{3}{50},$$

$$P(E') = \frac{1}{3}, \quad P(A|E') = \frac{12}{300} = \frac{1}{25}.$$

$$P(A) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{50}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{25}\right) = \frac{4}{75}$$

- Aturan Bayes
  - **Pengantar:**



- $P(A) = P[(E \cap A) \cup (E' \cap A)]$
- $P(A) = P(E \cap A) + P(E' \cap A)$
- $P(A) = P(E)P(A|E) + P(E')P(A|E')$

- $B_1 \cap A, B_2 \cap A, \ldots, B_k \cap A$
- $A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \ldots \cup (B_k \cap A)$

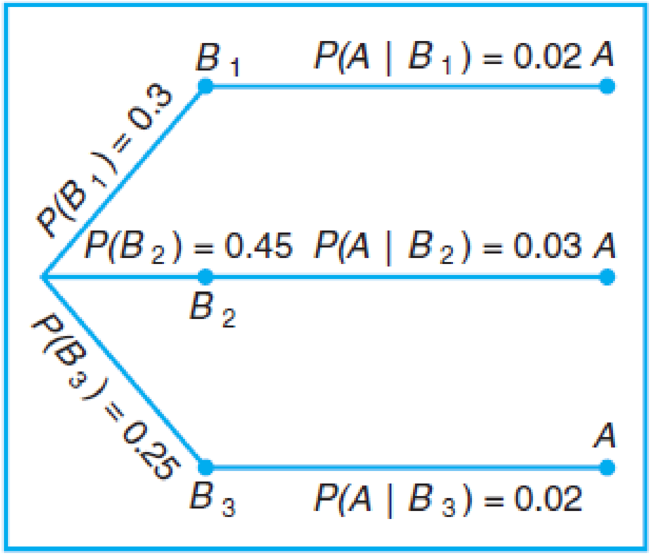
- $P(A) = P[(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \ldots \cup (B_k \cap A)]$
- $P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + \ldots + P(B_k \cap A)]$

- $P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)$
- $P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)$

- Aturan Bayes
  - **Pengantar:**

➢ Contoh soal:

Di suatu pabrik terdapat 3 mesin, B1, B2, dan B3, memproduksi 30%, 45%, dan 25% dari total produk secara berurutan. Data masa lalu menunjukkan produk cacat dari tiap mesin sebesar 2%, 3%, dan 2%. Jika satu produk akhir dipilih secara random, maka berapa peluang produk tersebut cacat?



- Definisi Kejadian:

A : produk adalah cacat

B1 : produk dari mesin B1

B2 : produk dari mesin B2

B3 : produk dari mesin B3

P(B1) P(A|B1) = (0.3) (0.02) = 0.006

P(B2) P(A|B2) = (0.45) (0.03) = 0.0135

P(B3) P(A|B3) = (0.25) (0.02) = 0.005

P(A) = P(B1) P(A|B1) + P(B2) P(A|B2) + P(B3) P(A|B3)

P(A) = 0.006 + 0.0135 + 0.005

P(A) = 0.0245

- Aturan Bayes
  - Dirumuskan oleh Thomas Bayes, pada 1700-an
  - Merupakan teorema tentang kejadian bersyarat yang mencari informasi tentang peluang kejadian kedua terjadi jika kejadian pertama telah terjadi
    - $P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)$
    - $P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{P(A)}$
    - $P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)}$
    - $for\ r = 1, 2, \dots, k$
    - A: "$kejadian\ pertama$"
    - B_r: "$kejadian\ kedua$"

Contoh Soal

- Sama dengan persoalan pada 3 mesin B1, B2, dan B3 di atas. Jika ternyata diketahui bahwa produk yang diambil adalah cacat (*kejadian A telah terjadi*), berapakah peluang produk cacat tersebut berasal dari mesin B3?
- **Jawab:**
  - $$P(B_3|A) = \frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)},$$

$$P(B_3|A) = \frac{0.005}{0.006 + 0.0135 + 0.005} = \frac{0.005}{0.0245} = \frac{10}{49}$$

Contoh Soal

- Sebuah perusahaan manufaktur menggunakan 3 jenis pendekatan untuk mendesain dan membuat suatu produk. Dengan pertimbangan biaya, maka ketiganya digunakan pada waktu yang berbeda. Setelah didata, ternyata komposisi penggunaan pendekatan 1, 2, dan 3 adalah sebanyak 30%, 20%, dan 50%. Tingkat produk cacat dari ketiga pendekatan tersebut berbeda, yaitu:

  $P(D|P_1) = 0.01;\qquad P(D|P_2) = 0.03;\ P(D|P_3) = 0.02;$

  Jika pengambilan satu produk secara random hasilnya adalah cacat, pendekatan manakah yang paling besar kontribusi dan bertanggungjawab?

- **Jawab:**
  - $P(P_1) = 0.3;\qquad P(P_2) = 0.2;\qquad P(P_3) = 0.5;$
  - $P(P_1|D) = \frac{P(P_1)\ P(D|P_1)}{P(P_1)\ P(D|P_1)+P(P_2)\ P(D|P_2)+P(P_3)\ P(D|P_3)} =$
    $\frac{(0.3)(0.01)}{(0.3)(0.01)+(0.2)(0.03)+(0.5)(0.02)}$
  - $P(P_1|D) = 0.158;$ *Dengan cara yang sama dapat dihitung pula*:
  - $P(P_2|D) = 0.316;\quad P(P_3|D) = 0.526$
  - **Kesimpulan:** Pendekatan ketiga memiliki proporsi terbesar, sehingga kemungkinan besar cacat merupakan hasil dari pendekatan ketiga

- Referensi
  - Walpole, Myers. (2012). *Probability & Statistics for Engineers & Scientists (9th Ed).* Pearson: Boston, MA.